1. Пусть X - лин. нормир. пр-во. Док-ть, что $\forall x, y \in X$:
$\|x\| \leq \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$.

$$\|x\| = \frac{1}{2}\|x+y+x-y\| \leq \frac{1}{2}\|x+y\| + \frac{1}{2}\|x-y\| \leq$$

обозначим $A = \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$

$$\leq \frac{1}{2}\cdot A + \frac{1}{2}\cdot A = A = \max(\|x+y\|, \|x-y\|),$$ ч.т.д.

(2.) Можно ли в пр-ве $C^1[a,b]$ принять за норму ф-ла $x(t)$: а) $\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$; б) $\max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$

в) $|x(b)-x(a)|+\max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$

г) $|x(a)|+\max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$; д) $\int_a^b |x(t)|dt+\max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$.

(а) да. Проверка аксиом нормы:

1) $x(t)\equiv 0 \Rightarrow \|x\|=0$ и $\|x\|=0 \Rightarrow x(t)\equiv 0$ на $[a,b]$.

2) для $\forall a\in\mathbb{R}$: $\|ax\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|ax(t)|=|a|\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|=$
$=|a|\,\|x\|$.

3) $\max\limits_{[a,b]}|x(t)+y(t)|\leq\max\limits_{[a,b]}|x(t)|+\max\limits_{[a,b]}|y(t)|$ —
– следует из нер-ва Δ-ка для модулей.

(б) нет. $\|x\|=0 \Rightarrow x'(t)\equiv 0 \Rightarrow x(t)\equiv C$.

(в) нет. не выполнена 1ая аксиома.

(г) да. 1) $x(t)\equiv 0 \Rightarrow \|x\|=0$

$\|x\|=0 \Rightarrow \max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|=0$ и $x(a)=0$.

$\Downarrow$

$x(t)\equiv C$, а т.к. $x(a)=0$, то $x(t)\equiv 0$.

2) очевидно.

3) $|x(a)+y(a)|+\max\limits_{[a,b]}|x'(t)+y'(t)|\leq\left(|x(a)|+\max\limits_{[a,b]}|x'(t)|\right)+$
$+\left(|y(a)|+\max\limits_{[a,b]}|y'(t)|\right)$.

(д) да. 1) $x\equiv 0 \Rightarrow \|x\|=0$; $\|x\|=0 \Rightarrow \int_a^b|x(t)|dt=0$ и
и $|x'(t)|=0 \Rightarrow x(t)=C \Rightarrow \int_a^b c\,dt=0 \Rightarrow C=0$.

2) очевидно
3) аналогично а) и г)

3. Будет ли мн-во всех многочленов в $C[a,b]$
а) открытым ; б) замкнутым ?

(а) Мн-во L всех многочленов в $C[a,b]$ не явл-ся открытым, т.к. в силу т. Фейера, $\forall$ непр-ую на $[a,b]$ ф-ю можно приблизить средними по Чезаро частичными суммами своего ряда Фурье, кот. алгебраич. мн-нами не явл-ся.
$\Rightarrow$ $\forall$ окр-ть произв. многочлена из L содержит в себе ф-ю, не принадл-ю L.

(б) Мн-во L всех многочленов в $C[a,b]$ не явл-ся замкнутым. Пример: ряд Тейлора для $\sin x$, $x \in [a,b]$, ряд сх-ся равномерно на $[a,b]$ $\Rightarrow$ частичные суммы этого ряда, суть многочлены, $\in L$, сх-ся к $\sin x$ по норме $C[a,b]$, но $\sin x$ не явл-ся алгебраич. мн-ном $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sin x \notin L \Rightarrow L$ - не замкнуто.

4. Док-ть, что всякое лин. многообразие в лин. норм. пр-ве есть подпр-во.

лин. многообр-е — совокупность эл-тов лин. норм. пр-ва, содержащая вместе с x и y их лин. комб. $\alpha x + \beta y$.

лин. подпр-во — замкнутое лин. многообразие.

Пусть L — лин. многообразие, т.е. $\forall x \in L$

$$x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_{n_1} e_{n_1}.$$

Рассм. произвольную фундаментальн. послед-ть $\{x^n\}$, где $x^n = \xi_1^n e_1 + \ldots + \xi_{n_1}^n e_{n_1}$.

Из следствия 2 т. Хана-Банаха $\Rightarrow \exists$ функц-л $f : \overline{L} \to \mathbb{R}$, т.что $f(e_k) = 1$, $f(e_j) = 0$, $\forall j \neq k$.

Рассм. $f(x^n - x^m) = \xi_k^n - \xi_k^m$:

$$|f(x^n - x^m)| = |\xi_k^n - \xi_k^m| \leq \|f\| \cdot \|x^n - x^m\| \to 0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\xi_k^n - \xi_k^m| \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

След-но, $\forall k \ \exists \xi_k : \lim\limits_{n \to \infty} \xi_k^n = \xi_k$.

Рассм. $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_{n_1} e_{n_1}$:

$$\|x^n - x\| = |\xi_1^n - \xi_1| \|e_1\| + \ldots + |\xi_{n_1}^n - \xi_n| \|e_{n_1}\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$\Rightarrow x = \lim\limits_{n \to \infty} x^n \in L \Rightarrow L$ - замкнуто $\Rightarrow$

$\Rightarrow L$ - подпр-во.

5. Пусть X - лин. нормир. пр-во. $L \subset X$ - лин. многообр-е, $L \neq X$. Док-ть, что L не содержит ни одного шара.

от противного: $\exists x_0 \in L,\ \varepsilon > 0:\ S_\varepsilon(x_0) \subset L$.

покажем, что тогда $\forall x_1 \in X:\ x \in L$ (т.е. $L = X$)

$x_1 = (x_1 - x_0) + \underset{L}{\underset{\Uparrow}{x_0}}$. Покажем, что тогда $x_1 - x_0 \in L$.

$$x_1 - x_0 = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left(\frac{2\|x - x_0\|}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|};$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \cdot \underset{\text{и } x_0 \in L}{\underset{\Uparrow}{\frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}}} \in L, \text{ т.к. } x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|} \in S_\varepsilon(x_0) \subset L$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{2\|x_1 - x_0\|}{\varepsilon}\right) \cdot \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}}_{= x_1} \in L, \text{ т.е. } x_1 \in L$$

XX.

$\Rightarrow$ В L не содержится ни одного шара.

6. Образуют ли в пр-ве $C[-1,1]$ подпр-во след. мн-ва ф-й:

а) монот. ф-ии

б) чётные ф-ии

в) многочлены

г) непр. кус.-линейн. ф-ии.

(а) L - мн-во монот. ф-й - это не линейнообр-е: рассм. $f(x) = x \in L$, $g(x) = e^x \in L$. Но $h(x) = g(x) - f(x) = e^x - x \notin L$.

(б) L - мн-во чётн. ф-й явл-ся подпр-вом в $C[-1,1]$. Действ-но, L - лин. многообр-е, L - замкнуто, т.к. если это не так, то $\exists x_n \in L: x_n \to x$ и $x \notin L$. Тогда $\exists t_0 \in (0,1]: x(t_0) \neq x(-t_0)$.

$$x_n \xrightarrow[C[-1,1]]{n\to\infty} x \overset{def}{\equiv} \|x_n - x\|_{C[-1,1]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow \max_{[-1,1]} |x_n(t) - x(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x_n(t_0) - x(t_0)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ |\underbrace{x_n(-t_0)}_{= x_n(t_0)} - \underbrace{x(-t_0)}_{\neq x(t_0)}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$$, что невозможно при $t_0 > 0$.

$\Rightarrow L$ - замкнуто, L - подпр-во в $C[-1,1]$.

в) L - мн-во многочленов незамкнуто отн-но нормы $C[-1,1]$ (из 3.3).

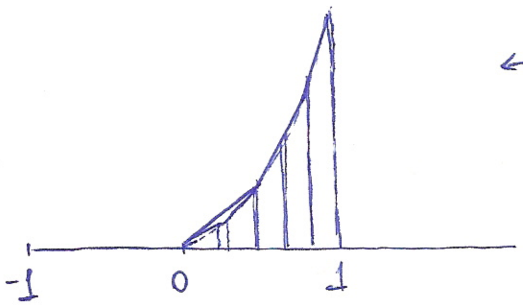
2) L - мн-во непр. кус.-лин. ф-ий не замкнуто в $C[-1,1]$.

пусть $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,0], \\ x^2, & x \in (0,1]. \end{cases}$

введём обозначения: $\frac{k}{2^n} = x_n^k$, $f(x_n^k) = f_n^k$, $k = 0, \dots, 2^n$.

Рассм. посл-ть $\{f_n\}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} f_n^k + \dfrac{f_n^{k+1} - f_n^k}{x_n^{k+1} - x_n^k}(x - x_n^k), & x \in (x_n^k, x_n^{k+1}). \\ 0, & x \in [-1,0]. \end{cases}$$



← приближает параболу кус.-лин. непр. функциями.

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \max_{\bigcup_{k=1}^{n-1}(x_n^k, x_n^{k+1})} |f_n(x) - f(x)| =$$

$$= \max_k \left| f_n\left(\frac{x_n^k + x_n^{k+1}}{2}\right) - f\left(\frac{x_n^k + x_n^{k+1}}{2}\right)\right| = \frac{1}{2^{2(n+1)}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Rightarrow \underbrace{f_n(x)}_{\in L} \to \underbrace{f(x)}_{\notin L}$ по норме $C[-1,1]$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow L$ - не замкнуто $\Rightarrow L$ - не явл. подпр-вом.

7. Образуют ли в пр-ве $C[-1,1]$ подпр-во следующие мн-ва ф-й:

а) многочлены степени $\le k$;

б) непр. диф-мые ф-ии;

в) непр. ф-ии с огранич. вариацией;

г) ф-ии $x(t)$, удовл. усл. $x(0)=0$.

(а) L - мн-во мн-ов степени $\le k$. Это - конечномерное лин. многообразие (базис: $1, x, x^2, \dots, x^k$) $\Rightarrow$ L - подпр-во.

(б) L - мн-во непр. дифф. ф-й не явл-ся подпр-вом, т.к. не замкнуто. Пример: рассм. $C^1[-1,1]$:

$$f_n(x) = \begin{cases} -x, & x\in[-1,-\frac{1}{n}], \\ \frac{nx^2}{2}+\frac{1}{2n}, & x\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}], \\ x, & x\in[\frac{1}{n},1]. \end{cases} \quad f_n(x)\in C^1[-1,1],$$

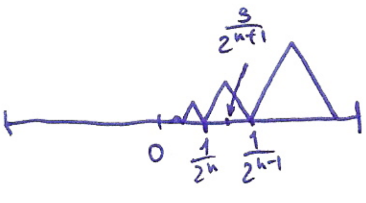
$$|f_n(x)-|x|| = \begin{cases} 0, & x\in[-1,1]\setminus[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}] \\ \frac{nx^2}{2}+\frac{1}{2n}-|x|, & x\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max_{[-1,1]} |f_n(x)-|x|| = f_n(0) = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_n(x) \to |x|$ по норме $C[-1,1]$

Но $x \notin L \Rightarrow L$ - не замкнуто.

(в) L - мн-во непр. ф-й с огранич. вариацией. Не явл. подпр-вом, т.к. не замкнуто. Пример:



$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[-1,0],\\ \frac{2^{n+1}}{n}x-\frac{2}{n}, & x\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^{n+1}}\right]\\ -\frac{2^{n+1}}{n}x+\frac{4}{n}, & x\in\left[\frac{3}{2^{n+1}},\frac{1}{2^{n-1}}\right]\end{cases}$$

Тогда $f(x)\geq 0$, $x\in[-1,1]$, $f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0$, $n=1,2$ и

$\sup\limits_{x\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right]} f(x)=f\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{n}$ по построению.

$f(x)$ – непр-на в силу оценки $|f(x)|\leq\frac{1}{n}$, $x\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}\right]$.

Вариация $f(x)$: $\omega(f(x))=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$

$-1=t_0<t_1=0<\ldots<\frac{1}{2^n}<\frac{3}{2^{n+1}}<\frac{1}{2^{n-1}}<\ldots<1$.

Однако, $f(x)$ может быть по норме $C[-1,1]$ приближена ф-ями с огр. вариацией:

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\left[\frac{1}{2^n},1\right],\\ 0, & x\in\left[-1,\frac{1}{2^n}\right].\end{cases}$$

2) L – мн-во непр. ф-й $x(t)$, удовл-щих: $x(0)=0$.

L – лин. многообр-е: $x_1\in L$, $x_2\in L\Rightarrow x_1+x_2\in L$, т.к.

$(x_1+x_2)(0)=x_1(0)+x_2(0)=0$.

Замкнутость L следует из цепочки соотношений:

$f_n\to f$ в $C[-1,1]$ $\Leftrightarrow\max\limits_{[-1,1]}|f_n(x)-f(x)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Rightarrow|f_n(0)-f(0)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Rightarrow$

$\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow f(x)\in L$, т.к. $f(0)=0$ и $f(x)$ – непр., как предел посл-ти равном-но сх-ся ф-й.

(8.) пусть X - лин. нормир. пр-во, $A \subset X$ - фиксированно. док-ть, что $f(x) = \rho(x, A)$ - непр. отобр-е X в $\mathbb{R}$

т.е. н.д.: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta: \|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow |\rho(x_1, A) - \rho(x_2, A)| < \varepsilon$.

по опр-ю ρ имеем:

$$\rho(x_1, A) = \inf_{y^1 \in A} (x_1, y^{(1)}); \quad \rho(x_2, A) = \inf_{y^2 \in A} (x_2, y^{(2)}).$$

пусть $\{y_n^{(1)}\}$ такова, что $\|x_1 - y_n^{(1)}\| \to \rho(x_1, A)$,

тогда $\|x_2 - y_n^{(1)}\| \leq \underbrace{\|x_2 - x_1\|}_{< \delta \text{ по выбору } x_1 \text{ и } x_2} + \|x_1 - y_n^{(1)}\| \leq \|x_1 - y_n^{(1)}\| + \delta$.

$$\Rightarrow \rho(x_2, A) = \inf_{y^{(2)} \in A} \|x_2 - y^{(2)}\| \leq \lim_{n \to \infty} \|x_2 - y_n^{(1)}\| \leq$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} \|x_1 - y_n^{(1)}\| + \delta = \rho(x_1, A) + \delta.$$

аналогично можно показать, что $\rho(x_1, A) < \rho(x_2, A) + \delta$.

$\Rightarrow |\rho(x_1, A) - \rho(x_2, A)| < \delta = \varepsilon$, ч.т.д.

9. Док-ть, что всякое конечномерное лин. норм. пр-во явл-ся банаховым.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - базис в X.

Рассм. $\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n)$ - это лин. конечномерное линоообр-е $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n)$ - подпр-во X (зад. №4)

$\Rightarrow$ $\forall$ фунд. $x_n \to x \in \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n)$.

Но $\mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n) = X \Rightarrow X$ - полное по своей норме пр-во $\Rightarrow X$ - банахово.

(10) док-ть, что подпр-во банахова пр-ва явл-ся банаховым пр-вом.

X - банахово пр-во $\Rightarrow$ X - лин., нормир. и полное отн-но своей нормы.

рассм. подпр-во $L \subset X$: L - линейно, т.к. подпр-во явл. лин. многообр-ем в X. В L можно ввести норму по правилу:

$\forall x \in L$: $\|x\|_L = \|x\|_X$ (тогда все аксиомы нормы вып-ны, т.к. они вып-ны в X.)

т.к. L - подпр-во, то $\forall$ послед-ть в L сх-ся к эл-ту в L по норме X, а значит, и по норме L.

$\Rightarrow$ L - пр-во, полное отн-но своей нормы, т.е. банахово.

(11.) Может ли в банаховом пр-ве иметь пустое пересечение послед-ть непустых замкнутых вложенных множеств?

Да. рассм. банахово пр-во $\mathbb{R}$ (пр-во вещ. чисел) и послед-ть непустых замкн. вложенных множеств в нём:

$$X_n = [n, +\infty), \; n = 1, 2, \ldots$$

$$X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \ldots$$

Имеем: $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X_n = \varnothing$

(12) док-ть, что в пр-ве со скал. произв-ем для

$\forall x, y, z: \quad \|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2$

$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = (z-x, z-x) + (z-y, z-y) =$

$= 2(z,z) + (x,x) + (y,y) - (x,z) - (z,x) - (y,z) - (z,y).$

$\frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(x-y, x-y) + 2\left(z - \frac{x+y}{2}, z - \frac{x+y}{2}\right) =$

$= \frac{1}{2}(x,x) - \frac{1}{2}(x,y) - \frac{1}{2}(y,x) + \frac{1}{2}(y,y) + 2(z,z) - (z,x) -$

$- (z,y) - (x,z) + \frac{1}{2}(x,x) + \frac{1}{2}(y,y) - (y,z) + \frac{1}{2}(y,x) +$

$+ \frac{1}{2}(y,y) = 2(z,z) + (x,x) + (y,y) - (x,z) - (z,x) - (y,z) -$

$- (z,y).$

(13.) док-ть, что для того, чтобы эл-т x гильбертова пр-ва H был ортогонален подпр-ву $L \subset H$ $\Leftrightarrow$ чтобы для $\forall$ эл-та $y \in L$ было: $\|x\| \leq \|x-y\|$.

($\Rightarrow$) $\forall y \in L$: $(x, y) = 0$.

рассм. $\|x-y\|^2 = (x-y, x-y) = \|x\|^2 - 2\overbrace{(x, y)}^{=0} + \|y\|^2 =$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow \|x-y\|^2 \geq \|x\|^2 \Rightarrow \|x-y\| \geq \|x\|$.

($\Leftarrow$) рассм. произв. $x \in H$: $x = \underset{L}{\underset{\Uparrow}{h}} + \underset{L^\perp}{\underset{\Uparrow}{z}}$

по условию, имеем:

$\|x\| \leq \|x-y\|$, $\forall y \in L$, т.е.

$\|h+z\| \leq \|h+z-y\|$, $\forall y \in L$. Положим $y = h \Rightarrow$

$\Rightarrow \|h+z\| \leq \|z\| \Leftrightarrow (h+z, h+z) \leq (z, z) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (h, h) + (z, z) \leq (z, z) \Leftrightarrow (h, h) = 0 \Rightarrow h = 0$ ($\Rightarrow$)
$((h, z) = 0)$

($\Rightarrow$) $x = z \in L^\perp \Rightarrow x$ ортогонален L.

(14.) Док-ть, что при фиксир. $n \in \mathbb{N}$ мн-во $M = \{x \in l_2 : x = (x_1, x_2, \dots),\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$ явл-ся подпространством пр-ва l_2. Описать такое подпр-во N, что $l_2 = M \oplus N$.

Док-во: M — лин. многообр-е, т.к. $\forall x, y \in M$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $z = \alpha x + \beta y = (z_1, z_2, \dots)$:

$$\sum_{i=1}^{n} z_k = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i = 0.$$

кр. того, M - замкнуто: пусть $x^1, x^2, \dots \in M$, $x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x \in l_2$. Докажем, что $x \in M$.

$$x^k \xrightarrow{l_2} x \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^k - x_i)^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^k - x_i)^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (x_i^k - x_i)^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} (x_i^k - x_i)^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i^k - x_i)^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow x_i^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_i,\ i = 1, \dots, n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$\Rightarrow x \in M \Rightarrow M$ - замкнуто в l_2.

Рассм. $e^N = (1, \dots, 1, 0 \dots) \notin M$. Если $y = \alpha \cdot e^N \Rightarrow \forall x \in M$: $y \perp x$, i.e. $(y, x) = 0$.

Рассм. $N = L(e^N)$. Докажем, что $N = M^{\perp}$ и $l_2 = M \oplus N$

Берём произв. $z \in l_2$, тогда $z = \underset{M}{\underset{\Uparrow}{x}} + \underset{M^{\perp}}{\underset{\Uparrow}{y}}$

Пусть $y = \alpha \cdot e^N \Rightarrow y \perp M$. Тогда $x = z - y \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i =$

$= \sum_{i=1}^{n} z_i - n \cdot \alpha$. Если положить $\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i$, то $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

Т.о. для $\forall z \in l_2$: $z = \overset{M}{\overset{\cup}{x}} + \overset{N}{\overset{\cup}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot e^N}} \Rightarrow M^{\perp} = N$ и $l_2 = M \oplus N$, ч.т.д.

15. В пр-ве ℓ_2 рассм. послед-ть $x_k = (1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{2k}}, \dots)$, $k \in \mathbb{N}$. Док-ть, что линейная оболочка этой посл-ти всюду плотна в пр-ве ℓ_2.

от противного: Пусть $\exists f = (f^1, f^2, \dots) \in \ell_2$; $f \neq 0$ и $f \perp x_k$ $\forall k$, т.е. пр-во, ортогональное к $\overline{\mathcal{L}(x_1, \dots, x_k, \dots)}$ не пусто.

отметим первую $\neq 0$ компоненту f^p: $f^p \neq 0$, $f^1 = \dots = f^{p-1} = 0$. Т.к. $f \in \ell_2 \Rightarrow \exists\, c > 0 : |f^n| \leq c$ $\forall n$ (т.к. $\sum |f^n|^2 < \infty$).

рассм. $0 = (f, x_k) = \sum\limits_{n=p}^{\infty} \frac{f^n}{2^{kn}} \Rightarrow \frac{f^p}{2^{kp}} = -\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} \frac{f^n}{2^{kn}}$.

с другой стороны, т.к. $|f^n| \leq c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{f^n}{2^{kn}} \right| \leq \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{c}{(2^k)^n} = c \cdot \frac{\frac{1}{2^{k(p+1)}}}{1 - \frac{1}{2^k}} \leq \frac{2c}{2^{k(p+1)}}.$$

следов-но, имеем:

$$\left| \frac{f^p}{2^{kp}} \right| \leq \frac{2c}{2^{k(p+1)}} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{2c}{|f^p| \cdot 2^k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \quad \times .$$

следов-но, невозможно $\exists$-ние ненулевого эл-та f, ортогонального сразу всем эл-там $\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots)$ всюду плотно в ℓ_2.

(16.) Док-ть, что след. опер-ры явл-ся линейн. огранич-ми и найти их нормы:

а) $A: C^1[a,b] \to C[a,b]$, $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$

б) $A: L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $Ax(t) = t\int_0^1 x(\tau)\,d\tau$

а) линейность: $A(\alpha x+\beta y) = \frac{d}{dt}(\alpha x+\beta y) = \alpha\frac{dx}{dt} +$

$+\beta\frac{dy}{dt} = \alpha Ax+\beta Ay$.

$\|Ax\|_{C[a,b]} = \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{C[a,b]} = \max\limits_{[a,b]}|x'(t)| \le \max\limits_{[a,b]}|x'(t)| +$

$+\max\limits_{[a,b]}|x'(t)| = \|x\|_{C^1[a,b]} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x\|_{C^1[a,b]}$ - огранич. $\Rightarrow \|Ax\|_{C[a,b]}$ - огранич. $\Rightarrow A$ - огр.

$\|A\| = \sup\limits_{x\ne0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le 1$

Рассм. $x_n(t) = \frac{\sin nt}{n+1} \Rightarrow x_n'(t) = \frac{n}{n+1}\cos nt \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x_n(t)\|_{C^1[a,b]} = \max\limits_{[a,b]}|x_n(t)| + \max\limits_{[a,b]}|x_n'(t)| =$

$= \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = 1$.

$\|Ax_n\|_{C[a,b]} = \max\limits_{[a,b]}|x_n'(t)| = \frac{n}{n+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{1}{\overset{\wedge\!\shortmid}{\|A\|}} = \sup\limits_{x\ne0}\frac{\|Ax\|_{C[a,b]}}{\|x\|_{C^1[a,b]}} \ge \frac{\|Ax_n\|}{\|x\|} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|A\| = 1$.

б) линейность:

$$A(\alpha x+\beta y)=t\int_0^1(\alpha x+\beta y)(\tau)d\tau=t\cdot\alpha\int_0^1 x(\tau)d\tau+$$

$$+t\cdot\beta\int_0^1 y(\tau)d\tau=\alpha Ax+\beta Ay.$$

$$\|Ax\|_{L_2[0,1]}=\left\{\int_0^1 t^2\left(\int_0^1 x(\tau)d\tau\right)^2dt\right\}^{1/2}=\left|\int_0^1 x(\tau)d\tau\right|\cdot$$

$$\cdot\left\{\int_0^1 t^2dt\right\}^{1/2}=\left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right)^{1/2}\cdot\left|\int_0^1 x(\tau)d\tau\right|\underset{К-Б}{\le}$$

$$\le\frac{1}{\sqrt3}\underbrace{\int_0^1 x^2(\tau)d\tau}_{\|x\|_{L_2}}\cdot\int_0^1 1d\tau=\frac{1}{\sqrt3}\|x\|_{L_2[0,1]}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ A - ограничен, и $\|A\|\le\frac{1}{\sqrt3}$.

Рассм. $x(t)\equiv1$ на $[a,b]$:

Тогда $\|x\|=\int_0^1 dt=1$; $\|Ax\|=\left(\int_0^1 t^2dt\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt3}$,

т.е. $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\frac{1}{\sqrt3}$

(17) Пусть X и Y – лин. норм. пр-ва, $A: X \to Y$ – лин. опер-р с обл. изм-я $R(A)$.

а) док-ть, что $R(A)$ – лин. многообр-е в Y.

б) Всегда ли $R(A)$ – подпр-во в Y?

а) $R(A) = \{ y \in Y : \exists x \in X : Ax = y \}$

н.д.: $y_1, y_2 \in Y \Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$, т.е. $\exists x \in X$:

$$Ax = \alpha y_1 + \beta y_2$$

имеем: $\exists x_1, x_2 : Ax_1 = y_1,\ Ax_2 = y_2$.

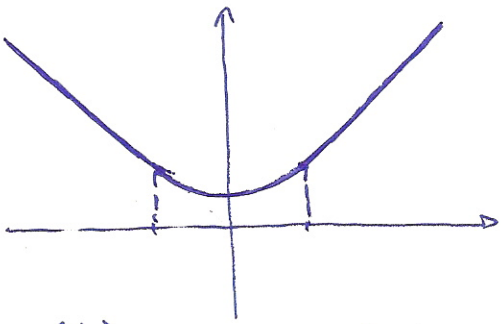
рассм. $A(\overbrace{\alpha x_1 + \beta x_2}^{=x}) = \alpha A x_1 + \beta A x_2 = \alpha y_1 + \beta y_2$, ч.т.д.

б) нет, не всегда.

рассм.: $A: C^2[-1,1] \to C^1[-1,1]$, $Ax(t) = \dfrac{dx}{dt}$

Тогда $R(A) \in C^1[-1,1]$. рассм:

$$x_n(t) = \begin{cases} -t, & t \in [-1, -\frac{1}{n}], \\ \frac{nt^2}{2} + \frac{1}{2n}, & t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}], \\ t, & t \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases} \quad x_n(t) \in C^1[-1,1]$$



$[x_n(t) \rightrightarrows |t|$ по норме $C[-1,1]]$.

Пусть $g_n(x) = \int_{-1}^{x} f_n(x)\,dx \in C^2[-1,1]$

Тогда $Ag_n = f_n \Rightarrow x_n \in R(A)$, $x_n(t)$ сходится к ф-ции, которая не принадлежит $C^1[-1,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow R(A)$ – не замкнуто $\Rightarrow R(A)$ не явл-ся подпр-вом.

(18.) Док-ть, что в банаховом пр-ве X для $\forall A \in \mathcal{L}(X \to Y)$ определены опер-ры $\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}$ и

$$\cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}.$$

Пр-во $\mathcal{L}(X \to Y)$ лин. опер-ов, действ. в банаховом пр-ве, само явл-ся банаховым, т.е. $\forall$ фунд. посл-ть из $\mathcal{L}(X \to Y)$ сх-ся к эл-ту этого пр-ва.

Рассм. посл-ть $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}$

A_n - лин. опер-ры (как сумма произв-й лин. опер-ов)

A_n - непр. опер-ры (как суперпозиция конечн. числа непр. опер-ов).

$\{A_n\}$ - фунд-на: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n > N, \forall p > 0:$

$$\|A_{n+p} - A_n\| = \left\| \sum_{k=n}^{n+p} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!} \right\| \le \sum_{k=n}^{n+p} \frac{\|A\|^{2k+1}}{(2k+1)!} \le$$

$$\le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} < \varepsilon \quad (\text{как хвост сх-ся ряда для } e^{\|A\|})$$

$\Rightarrow \{A_n\}$ - фунд-на $\Rightarrow A_n \to B \in \mathcal{L}(X \to Y)$ в силу полноты $\mathcal{L}(X \to Y)$

Случай с $\cos A$ разбирается аналогично.

(19.) Пусть X - банахово пр-во, $A \in L(X \to X)$. Док-ть, что $\|e^A\| \le e^{\|A\|}$. Найти e^I, где I - тожд. опер-ор.

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

$$\|e^A\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \right\| + \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!} + \underbrace{\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\|}_{<\varepsilon\text{, т.к. ряд } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \to} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} + \varepsilon = e^{\|A\|} + \varepsilon.$$

$\Rightarrow \|e^A\| \le e^{\|A\|}$ в силу произвольности ε.

$$(e^I)x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{I^k}{k!}\right) x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{I}{k!}\right) x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Ix}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{k!} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = x \cdot e, \ \forall x \in X \Rightarrow e^I = e.$$

20. Рассм. опер-р $A: C[0,1] \to C[0,1]$.

$Ax(t) = \frac{d^2x}{dt^2} + x(t)$ с обл-ю опр-я $D(A)$ – мн. многообр-е

дважды непр. диф-ых ф-ций $x(t)$, удовл. усл-ям

$x(0) = x'(0) = 0$.

Найти A^{-1} и док-ть, что он ограничен.

Обозначим $x_1 = x$, $x_2 = \frac{dx_1}{dt}$, тогда:

$$\begin{cases} y(t) = \frac{d^2x}{dt^2} + x(t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1(t) + y(t), \\ x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dX}{dt} = BX(t) + Y(t), \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad \text{где } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$X(t) = (x_1(t), x_2(t))$

$Y(t) = (0, y(t))$

$X_0 = (0, 0)$.

у этой задачи $\exists!$ реш-е: $X(t) = e^{tB}(\underbrace{X_0}_{0} + \int_0^t e^{-sB} Y(s)\,ds)$

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad e^{-sB} = \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix}.$$

Тогда $x(t) = x_1(t) = -(\cos t \int_0^t y(s) \sin s\,ds +$

$+ \sin t \int_0^t y(s) \cos s\,ds) \Rightarrow \|x\| \underset{(0 \le t \le 1)}{\le} \|y\| \left| \int_0^t \sin s\,ds \right| \cdot$

$\cdot |\cos t| + \|y\| \left| \int_0^t \cos s\,ds \right| |\sin t| \le 2\|y\| + 2\|y\| = 4\|y\|$.

(21.) Рассм. оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$,

$Ax(t) = x(t) + \int_0^t e^{-|s-t|} x(s)\,ds$. Существует ли A^{-1}?

$\exists A^{-1}$, если $\exists!$ решение задачи $Ax(t) = y(t)$.

Найдём $\ker A = \{x(t) \in C[0,1] : Ax = 0\}$.

$$0 = \int_0^t e^{-|s-t|} x(s)\,ds = \int_0^t e^{s-t} x(s)\,ds = e^{-t}\int_0^t e^s x(s)\,ds$$

$0 \le s \le t \Leftrightarrow s-t \le 0.$

имеем $\int_0^t e^s x(s)\,ds = 0, \ \forall t$.

$\Rightarrow e^s x(s) = 0 \ \Rightarrow \ x(s) = 0, \ \forall s.$

$(x \in C[0,1])$

$\Rightarrow \ker A = \{0\}$

$\Rightarrow$ если $\exists$ решение задачи $Ax(t) = y(t)$, то оно единственно.

Если $y(t) \in C^1[0,1]$, то решение задачи $Ax(t) = y(t)$ заведомо $\exists$-ет:

$$\int_0^t e^{s-t} x(s)\,ds = y(t)$$

$$\int_0^t e^s x(s)\,ds = e^t y(t) \quad \leftarrow \text{дифф-ем по } t$$

$$e^t x(t) = e^t y(t) + e^t y'(t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{x(t) = y(t) + y'(t)}$. Но если $y(t) \in C[0,1]$ и $y(t) \notin C^1[0,1]$, то решения $x(t)$ может не сущ-ть.

$\Rightarrow A^{-1}$ не обратим.

(22) Рассм. оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$.

$$Ax(t) = \int_0^1 x(\tau)\,d\tau + x(t)$$

а) док-ть, что $\ker A \overset{\text{о.б.}}{=} N(A) = 0$, т.что $\forall y \in C[0,1]$: ур-ние $Ax = y$ не может иметь более 1 решения.

б) найти опер-р A^{-1} и док-ть, что он ограничен.

а) $x \in \ker A \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x(t) + \int_0^1 x(\tau)\,d\tau = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -x(t) = \underbrace{\int_0^1 x(\tau)\,d\tau}_{\text{число } (C)} \Rightarrow -x(t) = C \Rightarrow C = \int_0^1 (-C)\,d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = -C \Rightarrow C = 0.$$

$\Rightarrow x(t) = 0 \Rightarrow \ker A = \{0\}$.

б) $Ax(t) = x(t) + \underbrace{\int_0^1 x(\tau)\,d\tau}_{C} \overset{\text{о.б.}}{=} f \Rightarrow x = f - C$

$$f = Ax = \overbrace{f - C}^{x} + \int_0^1 \underbrace{(f - C)}_{x}\,d\tau = f - C + \int_0^1 f(\tau)\,d\tau - C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2C = \int_0^1 f(\tau)\,d\tau \Rightarrow C = \frac{1}{2}\int_0^1 f(\tau)\,d\tau. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = A^{-1}f = f(t) - \frac{1}{2}\int_0^1 f(\tau)\,d\tau.$$

$$\|A^{-1}f\| \le \|f\| + \frac{1}{2}\max_{[0,1]}|f(t)| = \frac{3}{2}\|f\|.$$

если $\|f\|$ - огранич. $\Rightarrow$ $\|A^{-1}f\|$ - огранич. $\Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1}$ - огранич. оператор.

23. Доказать, что оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$,

$Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s)\,ds$ имеет ограниченный обратный и найти A^{-1}.

Док-во: $Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s)\,ds = x(t) +$

$$+ e^t \underbrace{\int_0^1 e^s x(s)\,ds}_{C} = x(t) + e^t \cdot C \overset{\text{обозн.}}{=} f(t)$$

$\Rightarrow x = f - C \cdot e^t$

$$\Rightarrow C = \int_0^1 e^s x(s)\,ds = \int_0^1 e^s (f - C \cdot e^s)\,ds = \int_0^1 e^s f(s)\,ds -$$

$$- C \underbrace{\int_0^1 e^{2s}\,ds}_{\frac{1}{2}(e^2-1)}.$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(e^2-1)} \int_0^1 e^s f(s)\,ds$$

Поэтому $A^{-1} f = f(t) - C e^t$, где C

$A^{-1}: C[0,1] \to C[0,1]$ ограничен, т.к.

$$\|A^{-1} f(t)\|_{C[0,1]} \le \|f\| + \|e^t \int_0^1 e^s f(s)\,ds\| =$$

$$= \|f\| + \|e^t \cdot \max_{t \in [0,1]} e^t f(t)\| \le \|f\| + e^2 \|f\|$$

$\Rightarrow A^{-1}$ переводит $\forall$ огр. мн-во в огранич. $\Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1}$ − огранич. опер-р.

$$\left\| e^t \int_0^1 e^s f(s)\,ds \right\| = \max_{[0,1]} \left| e^t \int_0^1 e^s f(s)\,ds \right| =$$

$$= e \cdot \max_{[0,1]} \left| \int_0^1 e^s f(s)\,ds \right| \leq e \cdot \max_{[0,1]} \int_0^1 \left| e^s f(s) \right| ds =$$

$$= e \cdot \max_{[0,1]} \int_0^1 |e^s|\,|f(s)|\,ds = e \cdot \max_{[0,1]} |e^s f(s)| =$$

$$= e^2 \cdot \max_{[0,1]} |f(s)| = e^2 \cdot \|f\|.$$

24. Пусть X - комплексн. лин. пр-во, f - определ-ый на X лин. функционал, $f \neq 0$. Док-ть: $R(f) = \mathbb{C}$ - всё компл. пр-во

Н.д., что $R(f)$ содержит 2 ЛНЗ вектора, тогда в силу линейности f : $R(f) = \mathbb{C}$ $(\dim \mathbb{C} = 2)$.

по условию, $\exists\, z \in X$, т.что: $\underbrace{f(z)}_{=x+iy} \neq 0$

т.к. $x+iy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \vee y \neq 0$

рассм. $f(\underbrace{iz}_{\in X}) = i f(z) = ix - y \neq 0$

(не м.быть $z=0$, если f-линейн и $f(z)\neq 0$)

Докажем, что $f(z)$ и $f(iz)$ - ЛНЗ:

Пусть $\alpha_1 f(z) + \alpha_2 f(iz) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 x - \alpha_2 y = 0 \\ \alpha_1 y + \alpha_2 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow \overset{\neq 0}{f(z)}$ и $\overset{\neq 0}{f(iz)}$ - ЛНЗ.

Т.к. $\forall\, c \in \mathbb{C}$: $c = \alpha_1 f(z) + \alpha_2 f(iz)$ в силу доказанного,

то $c = f(\alpha_1 z) + f(\alpha_2 iz) = f(\underbrace{\overbrace{\alpha_1 z + \alpha_2 iz}^{\tilde{z}}}_{\in X}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, c \in \mathbb{C}\ \exists\, \tilde{z} \in X$, т.что: $f(\tilde{z}) = c$.

(25.) Док-ть, что след. функционалы в $C[-1,1]$ явл-ся линейными и непр-ми; найти их нормы.

а) $f = \langle x, f \rangle = 2(x(1) - x(0))$;

б) $f = \langle x, f \rangle = \int_{-1}^{0} x(t)\,dt - \int_{0}^{1} x(t)\,dt$

а) линейность: $f : C[-1,1] \to \mathbb{R}$

$f(\alpha x + \beta y) = 2((\alpha x + \beta y))(1) - (\alpha x + \beta(y))(0)) =$

$= 2\alpha(x(1) - x(0)) + 2\beta((y(1) - y(0)) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

непр. $\Leftrightarrow$ огранич.:

$\|f(x)\|_{\mathbb{R}} = |f(x)| \le |2(x(1) - x(0))| \le 2|x(1)| + 2|x(0)| \le$

$\le 4\|x\|$.

т.к. $\|f\| = \sup\limits_{x \ne 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \Rightarrow \|f\| \le 4$

Рассм. $x(t) = \cos(\pi(t+1))$; $\|x\|_{C[-1,1]} = \max\limits_{[-1,1]} |\cos\pi(t+1)| = 1$

$f = \langle x, f \rangle = 2(x(1) - x(0)) = 2(\cos 2\pi - \cos\pi) = 4$.

$\Rightarrow \|f\| = \sup\limits_{x \ne 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \ne 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = 4$, т.к.

на функции $x(t) = \cos(\pi(t+1))$ достигается знач-е

$\frac{f(x)}{\|x\|} = 4$.

б) линейность: $f: C[-1,1]\to R$

$$f(\alpha x+\beta y)=\int_{-1}^{0}(\alpha x+\beta y)(t)\,dt-\int_{0}^{1}(\alpha x+\beta y)(t)\,dt=$$

$$=\alpha\int_{-1}^{0}x(t)\,dt-\alpha\int_{0}^{1}x(t)\,dt+\beta\int_{-1}^{0}y(t)\,dt-\beta\int_{0}^{1}y(t)\,dt=$$

$$=\alpha f(x)+\beta f(y).$$

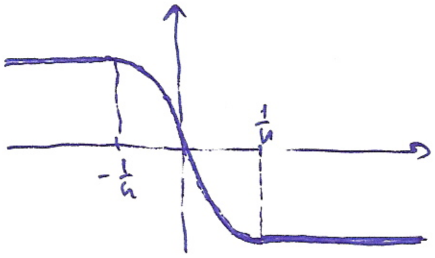
непр $\Leftrightarrow$ огранич: $\|f(x)\|_R=|f(x)|\le$

$$\le\left|\int_{-1}^{0}x(t)\,dt-\int_{0}^{1}x(t)\,dt\right|\le\left|\int_{-1}^{0}x(t)\,dt\right|+\left|\int_{0}^{1}x(t)\,dt\right|\le$$

$\le\max\limits_{[-1,0]}|x(t)|+\max\limits_{[0,1]}|x(t)|=2\|x\|\Rightarrow\|f(x)\|_R$ - огранич., если $\|x\|$ - огр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ - огр. $\Rightarrow f$ - непр; $\|f\|\le 2$, т.к. $\|f\|=\sup\dfrac{|f(x)|}{\|x\|}\le 2$

Рассм. $x_n(t)=\begin{cases}1, & t\in[-1,-\frac{1}{n}],\\ -\sin\pi n t, & t\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}],\\ -1, & t\in[\frac{1}{n},1].\end{cases}$



$\|x_n\|=\max\limits_{[-1,1]}|x_n(t)|=1$

$x_n\in C[-1,1]$

$$f(x_n)=\int_{-1}^{-\frac{1}{n}}dt-\int_{-1/n}^{0}\sin\pi n t\,dt-\int_{0}^{\frac{1}{n}}\sin\pi n t\,dt+\int_{\frac{1}{n}}^{1}dt=$$

$$=-\frac{1}{n}+1+\cos\pi n t\Big|_{-\frac{1}{n}}^{0}\cdot\frac{1}{\pi n}+\cos\pi n t\Big|_{0}^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\pi n}+1-\frac{1}{n}=$$

$$=2-\frac{2}{n}+\frac{1}{\pi n}(1+1)+\frac{1}{\pi n}(-1-1)=2-\frac{2}{n}\xrightarrow{n\to\infty}2$$

Получаем: $\|f\|=\sup\limits_{x\neq0}\dfrac{|f(x)|}{\|x\|}\ge\dfrac{|f(x_n)|}{\|x_n\|}=\left|2-\frac{2}{n}\right|\xrightarrow{n\to\infty}2$

с др. стороны: $2\ge\|f\|=\sup\limits_{x\neq0}\dfrac{|f(x)|}{\|x\|}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow\|f\|=2.$

(26.) Док-ть, что след. функционалы явл-ся линейными непр-ми в $C[-1,1]$ и найти их нормы:

а) $f(x) = \langle x, f \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x(t_k)$, где $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $t_k \in [-1,1]$.

б) $f(x) = \langle x, f \rangle = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\,dt - x(0)$.

а) линейность $f(x)$:

$$f(\alpha x + \beta y) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\alpha x + \beta y)(t_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x(t_k) +$$

$$+ \beta \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y(t_k) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

f - непр $\Leftrightarrow$ f - огранич.:

$$\| f(x) \| = | f(x) | \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \cdot | x(t_k) | \leq \max_{[-1,1]} | x(t) | \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| =$$

$$= \| x \| \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \Rightarrow f(x) \text{ - огранич.} \Rightarrow f(x) \text{ - непр.}$$

$$\| f(x) \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| f(x) \|}{\| x \|} \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|.$$

Покажем, что $\exists$ ф-я $x(t)$, для кот. $\| f(x) \| = \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|$.

Расс. $x(t)$, т.что в точках t_k она прин. знач-е $\operatorname{sgn} \alpha_k$, а в ост. точках произв. дополнена по непр-ти. Тогда:

$$\| f(x) \| = | f(x) | = \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \operatorname{sgn} \alpha_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \| f \| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|.$$

б) $f(x) = \langle x, f \rangle = \int_{-1}^{1} x(t)\,dt - x(0)$

линейность $f(x)$:

$$f(\alpha x + \beta y) = \int_{-1}^{1} (\alpha x + \beta y)(t)\,dt - (\alpha x + \beta y)(0) =$$

$$= \alpha \int_{-1}^{1} x(t)\,dt - \alpha x(0) + \beta \int_{-1}^{1} y(t)\,dt - \beta y(0) =$$

$$= \alpha f(x) + \beta f(y)$$

f – непр. $\Leftrightarrow$ f – огр.:

$$\|f(x)\| = |f(x)| = \left| \int_{-1}^{1} x(t)\,dt - x(0) \right| \leq \left| \int_{-1}^{1} x(t)\,dt \right| +$$

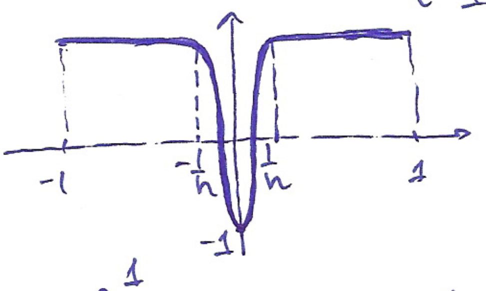
$$+ |x(0)| \leq \max_{[-1,1]} |x(t)| + |x(0)| = 3\|x\|. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ – огр. $\Rightarrow$ $f(x)$ – непр.; кр. того: $\|f(x)\| =$

$$= \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq 3.$$

Рассм. $x_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, -\frac{1}{n}], \\ -\cos \pi n t, & t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1, & t \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$ $\quad x_n(t) \in C[-1,1]$

$\|x_n\| = \max_{[-1,1]} |x(t)| = 1.$



$$|f(x_n)| = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} dt + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (-\cos \pi n t)\,dt +$$

$$+ \int_{\frac{1}{n}}^{1} dt - (-1) = -\frac{1}{n} + 1 - \underbrace{\frac{1}{\pi n} \sin \pi n t \Big|_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}}_{0''} + 1 - \frac{1}{n} + 1 = 3 - \frac{2}{n}.$$

$$\Rightarrow \|f\| \geq \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} = \left|3 - \frac{2}{n}\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 3$$

27. Будут ли огр-ны в пр-ве $C[0,1]$ след. лин. функционалы:

а) $\langle x, f \rangle = \int_0^1 x(t^2)\,dt$; б) $\langle x, f \rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x(t^n)\,dt$.

а) $\|f(x)\| = |f(x)| = \left| \int_0^1 x(t^2)\,dt \right| \leq \int_0^1 |x(t^2)|\,dt \leq$

$\leq \max\limits_{[0,1]} |x(t^2)| = \max\limits_{[0,1]} |x(t)| = \|x\| \Rightarrow f(x)$ - ограничен.

б) $\|f_n(x)\| = |f_n(x)| = \left| \int_0^1 x(t^n)\,dt \right| = \left\{ \begin{matrix} t^n = y; \\ t = y^{\frac{1}{n}}; \; dt = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1} \end{matrix} \right\} =$

$= \left| \frac{1}{n} \int_0^1 x(y) y^{\frac{1}{n}-1} dy \right| \leq \max\limits_{[0,1]} |x(y)| \int_0^1 \frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{n} dy =$

$1 - \frac{1}{n} < 1$

$= \|x\|_{C[0,1]} \cdot y^{\frac{1}{n}} \Big|_0^1 = \|x\|. \Rightarrow f_n$ - ограниченные ф-лы.

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \equiv \forall x(t) \in C[0,1]$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N: \forall n > N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$

$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_n(x)|}_{\leq \|x\|}$

$\Rightarrow \forall x \in C[0,1]$, т.к. $\|x\|$ - огранич. имеем:

$|f(x)| \leq \|x\| + 1 \Rightarrow f(x)$ - ограничен.

(28.) Док-ть, что след. ф-лы явл. лин., непр. и найти их нормы:

а) $\langle x, f\rangle = \int\limits_{-1}^{1} t x(t)\,dt$, $x \in C^1[-1,1]$

б) $\langle x, f\rangle = \int\limits_{-1}^{1} t x(t)\,dt$, $x \in L_1[-1,1]$

а) линейность: $f(\alpha x + \beta y) = \int\limits_{-1}^{1} t(\alpha x + \beta y)\,dt = \alpha \int\limits_{-1}^{1} t x(t)\,dt + $

$+ \beta \int\limits_{-1}^{1} t y(t)\,dt = \alpha f(x) + \beta f(y)$

f-непр. $\Leftrightarrow$ f-огранич.: $\|f(x)\|_{\mathbb{R}} = |f(x)| \le \int\limits_{-1}^{1} |t x(t)|\,dt \le$

$\le \max\limits_{[-1,1]} |x(t)| \le \underbrace{\|x\|_{C^1[-1,1]}}_{\max\limits_{[-1,1]}|x(t)| + \max\limits_{[-1,1]}|x'(t)|}$ $\Rightarrow$ f-огр. $\Rightarrow$ f-непр.

$\|f\| = \sup\limits_{x \ne 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|_{C^1[-1,1]}} \le 1$ по вышеизложенному.

Расм. $x_n(t) = \begin{cases} -1, & t \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ \sin n\pi t, & t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1, & t \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$, $x_n(t) \in C^1[-1,1]$

Тогда $f(x_n) = -\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{n}} t\,dt + \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} t\,dt + \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} t \sin n\pi t\,dt =$

$= -\dfrac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \dfrac{t^2}{2}\Big|_{\frac{1}{n}}^{1} - \dfrac{1}{\pi n}\int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} t\,d\cos \pi n t = 1 - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{\pi n}\Big(t \cos \pi n\Big|_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} -$

$- \int\limits_{-1/n}^{1/n} \cos \pi n t\,dt\Big) = 1 - \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{\pi n}\Big(\dfrac{1}{n}(-1) - \left(-\dfrac{1}{n}\right)(-1) - \dfrac{1}{\pi n}\sin \pi n t\Big|_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\Big) =$

$= 1 - \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{\pi n^2} \xrightarrow{n \to \infty} 1$

$$\|x_n\|_{C^1[-1,1]} = \max_{[-1,1]} |x_n(t)| = 1.$$

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geqslant \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|} = \frac{\left|1 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{\pi n^2}\right|}{1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Rightarrow \|f\| \geqslant 1.$$

т.о. $\|f\| \leq 1 \wedge \|f\| \geqslant 1 \Rightarrow \|f\| = 1.$

б) линейность – аналогично (а).

f – непр. $\Leftrightarrow$ f – огранич.

$$\|f(x)\|_{\mathbb{R}} = |f(x)| = \left| \int_{-1}^{1} t x(t)\, dt \right| \leq \int_{-1}^{1} |t|\,|x(t)|\, dt \leq$$

$$\leq \max_{[-1,1]} |t| \underbrace{\int_{-1}^{1} |x(t)|\, dt}_{\|x\|_{L_1[-1,1]}} = \|x\|.$$

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \leq 1 \Rightarrow f\text{ – огр.} \Rightarrow f\text{ – непр.}$$

Рассм. $x_n(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 - \frac{1}{n}, \\ n, & t \geqslant 1 - \frac{1}{n}. \end{cases}$

$$\|f(x_n)\| = |f(x_n)| = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} tn\, dt = \frac{t^2}{2}\cdot n \Big|_{1-\frac{1}{n}}^{1} = \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 =$$

$$= \cancel{\frac{n}{2}} - \cancel{\frac{n}{2}} + 1 - \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2n}.$$

$$\|x_n\|_{L_1[-1,1]} = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} n\, dt = n\cdot t \Big|_{1-\frac{1}{n}}^{1} = n - n + 1 = 1.$$

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geqslant \frac{f(x_n)}{\|x_n\|} = \left|1 - \frac{1}{2n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \|f\| \geqslant 1 \Rightarrow \|f\| = 1$ (т.к. ≤ 1 и $\geqslant 1$).

(29.) Док-ть, что ф-ал $\langle x, f \rangle = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$, $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_1$, явл-ся лин. непр. и найти его норму.

линейность:

$$f(\alpha x + \beta y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha x_k + \beta y_k}{k} = \alpha \sum_k \frac{x_k}{k} + \beta \sum_k \frac{y_k}{k} =$$

$x = (x_1, \dots, x_k, \dots) \in \ell_1$

$y = (y_1, \dots, \quad)$

$$= \alpha f(x) + \beta f(y).$$

непр. $\Leftrightarrow$ огранич.:

$$\|f(x)\|_R = |f(x)| = \left|\sum_k \frac{x_k}{k}\right| \leq \sum_k \left|\frac{x_k}{k}\right| \leq \sum_k |x_k| = \|x\|_{\ell_1}$$

$$\Rightarrow \|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq 1 \qquad \Rightarrow f\text{-огр} \Rightarrow f\text{-непр}.$$

Рассм. $x = (1, 0, \dots, 0, \dots) \in \ell_1$:

$$f(x) = 1, \quad \|x\| = \sum_k |x_k| = 1 \Rightarrow \|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = 1.$$

(30) Для $x(t) \in C[-1,1]$ положим:

$$\langle x, f\rangle = \frac{x(-1)+x(1)}{2} + \int_{-1}^{1} t\,x(t)\,dt.$$

док-ть, что f – лин. огр. функционал.

линейность: $f(\alpha x+\beta y) = \frac{(\alpha x+\beta y)(-1)+(\alpha x+\beta y)(1)}{2} +$

$+ \int_{-1}^{1} t(\alpha x+\beta y)(t)\,dt = \alpha\frac{x(-1)+x(1)}{2} + \beta\frac{y(-1)+y(1)}{2} +$

$+ \alpha\int_{-1}^{1} t\,x(t)\,dt + \beta\int_{-1}^{1} t\,y(t)\,dt = \alpha f(x)+\beta f(y).$

ограниченность: $\|f(x)\|_{\mathbb{R}} = |f(x)| \le \left|\frac{x(-1)+x(1)}{2}\right| +$

$+ \left|\int_{-1}^{1} t\,x(t)\,dt\right| \le \max\limits_{[-1,1]}|x(t)| + \max\limits_{[-1,1]}|x(t)| \underbrace{\int_{-1}^{1}|t|\,dt}_{1} =$

$= \|x\|_{C[-1,1]} \Rightarrow f$ - ограниченный ф-ал.